TD 5 : Diagonalisation (2) (Indications)

Indications pour l'exercice 1 :

1. Se souvenir que lorsque p est un projecteur de E on a : $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$. Prendre alors la concaténation d'une base de $\mathrm{Ker}(p)$ et d'une base de $\mathrm{Im}(p)$ et remarquer que $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id})$.
2. Se souvenir que lorsque s est une symétrie de E on a : $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id})$.

Indications pour l'exercice 2 :

1. Remarquer que λ est valeur propre de A si et seulement si $\det(A - \lambda I) = 0$. Raisonner ensuite par l'absurde en supposant que A est diagonalisable, que peut on dire de la matrice diagonale semblable à A ?
2. λ est valeur propre de B si et seulement si $\det(B - \lambda I) = 0$. Commenter le nombre de valeurs propres distinctes obtenues.
3. λ est valeur propre de C si et seulement si $\mathrm{rg}(C - \lambda I) < 3$. Faire des opérations sur les lignes pour obtenir une CNS sur λ, puis étudier les dimensions des sous-espaces propres associés.
4. Faire comme à la question précédente, ou bien montrer par un raisonnement plus simple que 0 est l'unique valeur propre possible et raisonner comme à la question 1 pour montrer que D n'est pas diagonalisable.

Indications pour l'exercice 3 :

1. Il suffit de calculer AX_1 et de commenter le résultat obtenu.
2. Trouver les autres valeurs propres en étudiant le rang de $A - \lambda I$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. Commenter le nombre de valeurs propres distinctes. La P recherchée est la matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres.

Indications pour l'exercice 4 :

1. Pivote de Gauss
2. Mettre sous forme échelonnée $A(a) - \lambda I_3$. Traiter à part le cas $a = 1$ et le cas $a \neq 1$.
3. Conjecturer la réponse et raisonner par récurrence.

Indications pour l'exercice 5 :

1. Utiliser les sous-espaces propres de p et le fait que $p \neq 0$
2. Utiliser les sous-espaces propres de p et le fait que $p \neq \mathrm{Id}$.
3. Les sous-espaces propres trouvées aux questions précédentes devraient fournir la réponse
4. La réponse est non : construire un contre-exemple avec par exemple une projection p sur $\mathrm{Vect}\left((1,0)\right)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}\left((0,1)\right)$ dans $\mathbb{R}^2$ et un automorphisme g tel que $g \circ p = \lambda \mathrm{Id}_E \circ p$ mais tel que g ne commute pas avec p.

Indications pour l'exercice 6 :

Le cas $a = 0$ est facile. Si $a \neq 0$, remarquer que A est de rang 1 (donc la valeur propre 0 a une multiplicité égale à $n - 1$), et A possède une autre valeur propre évidente...

Utiliser les sous-espaces propres de A pour trouver ceux de B.

Indications pour l'exercice 7 :

1. Si E_λ désigne le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ, utiliser la caractérisation $v(x) \in E_\lambda \iff u(v(x)) = \lambda v(x)$.
2. Considérer la restriction de v à un sous-espace propre E_λ de u. Cette restriction est un endomorphisme de E_λ diagonalisable...

Indications pour l'exercice 8 :

1. (a) Les valeurs propres d'une matrice triangulaire supérieure se lisent sur sa diagonale.
   (b) Prendre deux matrices triangulaires supérieures et utiliser la question précédente.
2. Il suffit d'écrire le changement de base.
3. (a) Penser aux formules de duplications de cos et sin
   (b) La question précédente fournit une recette pour trouver une matrice A dont le carré est une matrice diagonale et qui satisfait la propriété demandée.

Indications pour l'exercice 9 :

1. Vérifications d'usage
2. Si $P(X) = X^n$, alors $\psi(P)(X) = (1 - X)^n$.
3. Pour bien comprendre l'application ψ_n : si $P(X)$ est un polynôme et que $Q(X) = \psi(P)(X)$, alors $Q(X) = P(1 - X)$. On a donc $\psi(Q)(X) = Q(1 - X)$...
4. (a) Tous les calculs nécessaire ont été fait dans la question 2)
   (b) Poser $P(X) = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ et déterminer des conditions sur a_3, a_2, a_1, a_0.
   (c) Les bases de $\mathrm{Ker}(\psi_3 - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(\psi_3 + \mathrm{Id})$ sont une base de diagonalisation de ψ_3.

Indications pour l'exercice 10 :

Écrire $(f - \alpha\mathrm{Id}) \circ (f + \alpha\mathrm{Id}) = f^2 - \alpha^2\mathrm{Id}$.

Si a et b sont inversibles, alors $a \circ b$ est inversible (cours). Que donne la contraposée ?

Indications pour l'exercice 11 :

1. On rappelle qu'un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.
2. Vérifications d'usage
3. Exprimer $u(f_0)$, $u(f_1)$, $u(f_2)$, $u(f_3)$ en fonction de (f_0, f_1, f_2, f_3).
4. Les valeurs propres d'une matrice triangulaire supérieure se lisent sur sa diagonal.

Indications pour l'exercice 12 :

1. Raisonner à l'aide de matrices définies par bloc
2. Un raisonnement par équivalence suffit car $A = PB \Longleftrightarrow P^{-1}A = B$ lorsque P est inversible.
3. Que se passe-t-il dans une base qui diagonalise A ?

Indications pour l'exercice 13 :

1. Vérifications d'usage
2. Supposer que P est un vecteur propre associé à λ et intégrer entre 0 et 1 l'égalité obtenue.
3. Noter que $(\phi + \alpha\mathrm{Id})(P) = A \times \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$ pour simplifier le calcul.
4. Raisonner sur les dimension en utiliser l'inégalité de dimensions données par la question précédente.
5. Remarquer que ϕ est nilpotent lorsque $\alpha = 0$

Indications pour l'exercice 14 :

1. Vérifications d'usage
2. Rappel : deux endomorphismes a et b de E sont égaux ssi $\forall x \in E, a(x) = b(x)$.
3. Endomorphisme Particulier cherche valeur propre particulière. Si E_λ est un sous-espace propre associé à u, considérer une projection quelconque sur E_λ.
4. (a) Il suffit d'écrire les définitions
   (b) Si $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(u - \lambda\mathrm{Id})$, on peut voir v comme une application linéaire de E vers $\mathrm{Ker}(u - \lambda\mathrm{Id})$
   (c) Utiliser la caractérisation : u diagonalisable ssi la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de E.

Indications pour l'exercice 15 :

1. Par simple lecture de φ
2. Résoudre, on doit trouver que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est une droite vectorielle.
3. Théorème du rang
4. Oui, les systèmes sont pénibles à écrire mais ils donnent bien $\mathrm{Ker}(\varphi) \cap \mathrm{Im}(\varphi) = \{0\}$ (et les résultats sur les dimensions permettent de conclure immédiatement).
5. Rappel : $\mathrm{e}^{ib} + \mathrm{e}^{-ib} = 2\cos(b)$
6. Attention à bien distinguer les cas $j = 1$ et $j = 2n + 1$ des autres.
7. Utiliser le résultat de la question 5 et l'appliquer au résultat de la question 6.a) pour voir apparaître le facteur commun.
8. Montrer φ a $2n + 1$ valeurs propres **distinctes**.